Estimation and Control of Dynamica Systems

Stefano Di Lena

2025

Indice

1 Introduzione

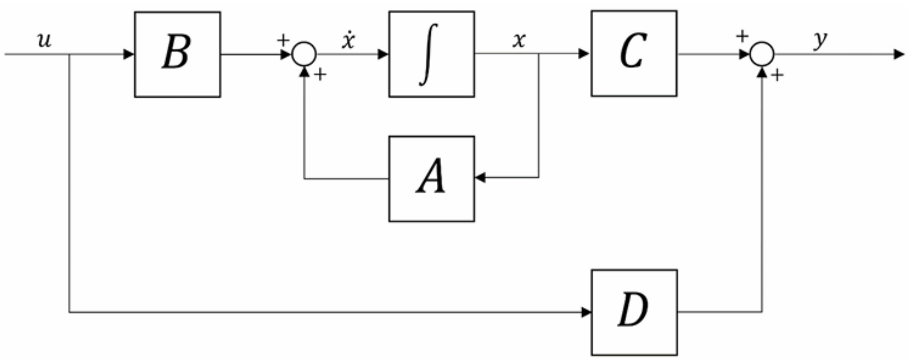
Un sistema dinamico LTI-TC è descritto dalle equazioni:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Con $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^m$.

Le dimensioni delle matrici sono: $A : n \times n$, $B : n \times m$, $C : p \times n$, $D : p \times m$.

Il sistema può essere rappresentato graficamente dal seguente schema a blocchi:



Se il sistema è strettamente proprio $D = 0$.

Per i sistemi LTI-TD:

$$S : \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

2 Controllabilità

Un sistema dinamco LTI-TC si dice *controllabile* quando esiste un ingresso u che trasferisce lo stato del sistema da uno stato iniziale $x_0 = x(0)$ ad un qualunque stato $x_f = x(t_f)$ in un tempo $t_f > 0$ finito.

2.1 Gramiano di Controllabilità

É una matrice $n \times n$:

$$\Gamma(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

Il sistema è controllabile se e solo se:

$$\rho(\Gamma(t)) = n \qquad \forall t > 0$$

L'ingresso di controllo u, che trasferisce lo stato del sistema da x_0 ad x_f è:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_f - t)} \Gamma^{-1}(t_f)(x_f - e^{At_f} x_0)$$

Per i sistemi LTI-TD non esiste il gramiano per calcolare l'ingresso in grado di trasferire lo stato da x_0 ad x_f, ma esiste una formula in grado di calcolare $u(k)$ che porta il sistema da x_0 ad x_f in massimo n passi (se il sistema è completamente controllabile). Dato un tempo $t \geq n$, si definisce il vettore contenente il valore di $u(k)$ negli istanti di tempo da 0 a $t-1$:

$$u^{t-1} = \begin{bmatrix} u(t-1 \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = C_t^T (C_t C_t^T)^{-1} x_f$$

con C_t matrice di controllabilità in t passi (di dimensione $n \times mt$).

2.2 Matrice di Kalman di Controllabilità

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Se $\rho(M_c) = n$ allora il sistema è controllabile. Altrimenti è possibile controllare solo n_c componenti [se $\rho(M_c) = n_c < n$].

2.2.1 Forma di Kalman di Controllabilità

Se si effettua una trasformazione per similitudine sullo stato (recordination), si identifica un nuovo vettore di stato tale che: $x = P_c z \iff z = P_c^{-1} x$.

La matrice di controllabilità diventa $\tilde{M}_c = P_c^{-1} M_c = \begin{bmatrix} M_c \\ 0 \end{bmatrix}$.

Per calcolare P_c: *scegliamo le prime n_c colone indipendenti di M_c e le restanti $n - n_c$ colonne sono scelte in modo da essere indipendenti dalle prime e tra loro.*

Possiamo scrivere scomponendo z le equazioni di stato e di uscita come:

$$\begin{cases} \dot{z}_c = A_c z_c + A_1 z_{n_c} + B_c u \\ \dot{z}_{n_c} = A_{n_c} z_{n_c} \\ y = C_1 z_c + C_2 z_{n_c} \end{cases}$$

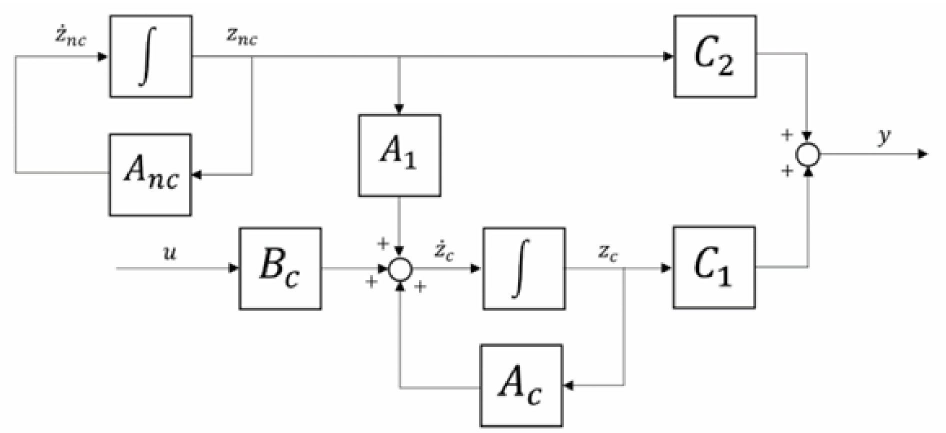
Con:

$$\begin{bmatrix} A_c & A_1 \\ 0 & A_{n_c} \end{bmatrix} = P_c^{-1} A P_c$$

$$\begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} = P_c^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = C P_c$$

Lo schema a blocchi del sistema è:



L'evoluzione è $z_{n_c} = e^{A_{n_c} t} z_{n_c}(0)$.

3 Retroazione di Stato

Consiste nel sottrarre all'ingresso il vettore di stato, pre-moltiplicato per un opportuna matrice K.

Il nuovo ingresso di controllo è $u = r - Kx$, con $r \in R^m, k \in R^{n \times m}$. L'equazione di stato diventa:

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(r - Kx) = (A - BK)x + Br = A_k x + Br$$

3.1 Forma Compagna

$$\dot{x}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} x_\gamma + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Dove $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice di stato A_γ.

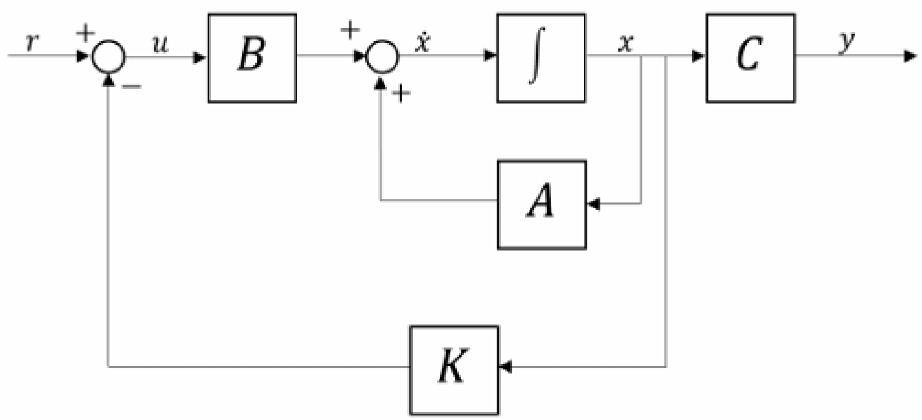
$$p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Un sistema in questa forma è controllabile; perciò i sistemi controllabili possono essere trasformati $x = P_\gamma x_\gamma$. Data la matrice di retroazione:

$$K_\gamma = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0 - \alpha_0 & \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \cdots & \bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dove $\bar{\alpha}_0, \cdots, \bar{\alpha}_{n-1}$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato. $P = M_c M_c^{-1}$.

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



3.1.1 Stabilizzabilità

Nei sistemi *non controllabili* ha senso fare la retroazione di stato sulla parte controllabile solo se il sistema è *stabilizzabile*, ovvero se per ogni polo instabile è verificata la seguente condizione:

$$\rho(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}) = n$$

4 Osservabilità

Un sistema dinamico LTI-TC è detto osservabile se e solo se il suo stato iniziale x_0 può essere determinato a partire dall'uscita y per un tempo finito $t_f > 0$.

4.1 Gramiano di Osservabilità

$$O(t) = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

Il sistema è osservabile se e solo se:

$$\rho(O(t)) = n \quad \forall t > 0$$

Dall'uscita si può ricostruire lo stato iniziale:

$$x(0) = O^{-1}(t_f)\int_0^{t_f} e^{A^T\tau}C^T y(\tau)d\tau$$

Nei sistemi LTI-TD, invece, dato il vattore contenente i valori dell'uscita libera:

$$y_\ell^{t-1} = \begin{bmatrix} y(t-1) \\ \vdots \\ y(0) \end{bmatrix}$$

Il valore dello stato iniziale è dato da:

$$x(0) = (O_t^T O_t)^{-1} O_t^T y_\ell^{t-1}$$

Con O_t matrice di osservabilità in t passi (di dimensione $pt \times n$).

4.2 Matrie di Kalman di Osservabilità

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Il sistema è osservabile se e solo se $\rho(M_o) = n$. Se, invece, $\rho(M_o) = n_0 < n$; allora solo n_o componenti dello stato iniziale potranno essere determinate.

4.2.1 Forma di Kalman di Osservabilità

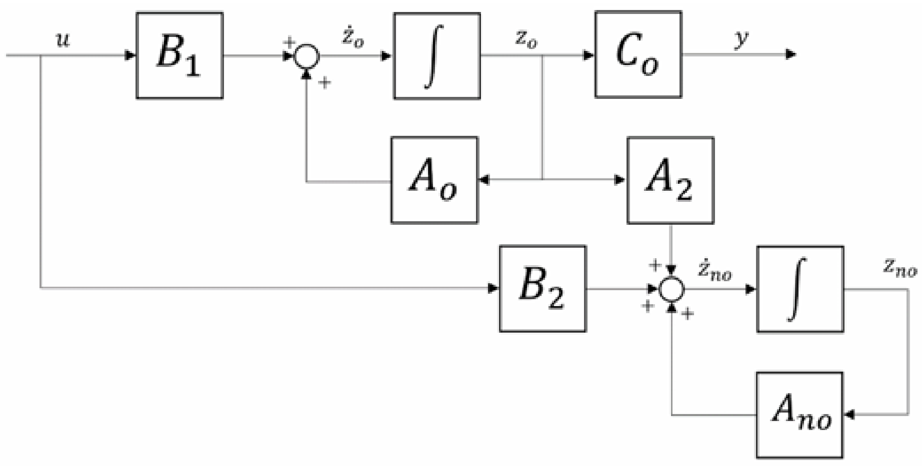
La matrice di trasformazione P_o è scelta in modo tale che *le prime n_o colonne coincidano con le n_o righe indipendenti di M_o trasposte, e le restanti $n - n_o$ colonne sono scelte in modo da essere ortogonali alle prime e linearmente indipendenti tra loro.*

$$x = P_o z$$

Le equazioni di stato e di uscita si trasformano nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{z}_o = A_o z_o + B_1 u \\ \dot{z}_{n_o} = A_2 z_o + A_{n_o} z_{n_o} + B_2 u \\ y = C_o z_o \end{cases}$$

Lo schema a blocchi che rappresenta il sistema è:



4.2.2 Rivelabilità

Il sistema si dice *rivelabile* se e solo se $\rho(\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}) = n$ per ogni polo instabile.

5 Realizzazione

Consiste nel trovare un sistema dinamico a partire da una f.d.t. assegnata.

Considerando un sistema strettamente proprio (D=0) di ordine n, il grado del numeratore è strettamente minore del grado del denominatore:

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_o}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_o}$$

Le realizzazioni possibili di una f.d.t. sono infinite.

Una realizzazione *minima* è una realizzazione i cui autovalori sono completamente controllabili ed osservabili (il sistema sarà di ordine n). Un esempio di questa realizzazione è ottenibile attraverso la forma compagna:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

6 Controllo Ottimo

Dato un generico sistema dinamico, descritto dall'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, si vuole che esso assumi un certo comportamento in modo tale da minimizzare un certo obiettivo funzionale:

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} f_o(x(t), u(t), t)dt$$

Si definisce la funzione *Hamiltoniana*:

$$H(x, u, \lambda, t) = f_o(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

Dove $\lambda \in R^n$ è detta variabile di co-stato.

Valgono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -(\frac{\partial H}{\partial x})^T \\ \dot{x} = (\frac{\partial H}{\partial \lambda})^T \end{cases}$$

Per minimizzare H rispetto ad u si pone la sua derivata uguale a zero, questa equazione viene detta "di controllo".

Se x_f o t_f sono assegnate possiamo ricavare altre condizioni. Si vuole che:

$$[H + \frac{\partial S}{\partial t}]_{t_f}\delta t_f + [(\frac{\partial S}{\partial x})^T - \lambda]_{t_f}^T \delta x_f = 0$$

Se t_f è assegnato $\delta t_f = 0$; se x_f è assegnato $\delta x_f = 0$. Se invece non sono fissi, deve accadere che:

$$H(t_f) = -\frac{\partial S}{\partial t}|_{t_f} \qquad \lambda(t_f) = (\frac{\partial S}{\partial x})^T|_{t_f}$$

7 Osservatore

Descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}\hat{u} \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Dove $\hat{x}$ è sia lo stato dell'osservatore, che la stima dello stato del sistema da osservare.

Si definisce l'errore sulla stima: $\epsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Parliamo di *stimatore asintotico* quando: $\lim_{t \to +\infty} |\epsilon(t)|$.

7.1 Osservatore di Luenberger

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_o(y - \hat{y}) = (A - K_o\hat{C})\hat{x} + Bu + K_o y \\ \hat{y} = \hat{C}\hat{x} \end{cases}$$

Definiamo quindi l'ingresso dell'osservatore $\hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$. Identifichiamo le matrici:

$$\hat{A} = A - K_o C \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} B & K_o \end{bmatrix}$$

Un osservatore così definito è *asintotico*.

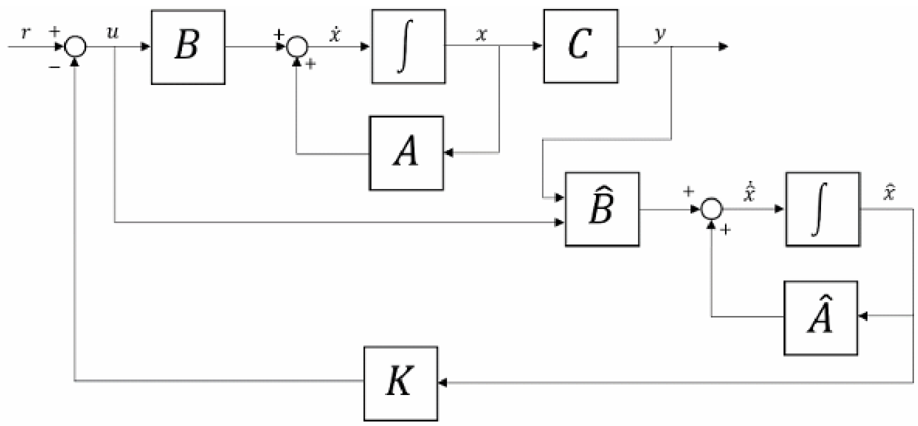
Per determinare K_o dobbiamo effettuare la retroazione di stato sul sistema duale:

$$\begin{cases} \dot{x}_D = A^T x_D + C^T u_D \\ y_D = B^T x_D \end{cases}$$

Quindi $A_D = A^T, B_D = C^T, C_D = B^T$.

La matrice di controllabilità del sistema duale è uguale alla trasposta della matrice di osservabilità del sistema di partenza: $M_{CD} = M_O^T$. Quindi se il sistema originale è completamente osservabile, allora il sistema duale è completamente controllabile e viceversa.

Dopo aver calcolato la retroazione di stato del sistema duale: $K_o = K_D^T$. Lo schema a blocchi:



7.2 Osservatore di Ordine Ridotto

Applicabile se l'uscita è del tipo $y = Cx = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 x_1$; con $C_1 \in R^{p \times p}$.

Nel caso in cui sia invertibile, si ottenono le preme p componenti dello stato così: $x_1 = C_1^{-1} y$.

Resta da stimare $\hat{x}_2 = z + Ly$; utilizzando un osservatore di ordine $n - p$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

Lo stimatore avrà uno stato regolato dalla seguente equazione di stato: $\dot{z} = Fz + Gy + Hu$.

Avendo introdotto 4 matrici, abbiamo bisogno di 3 vincoli:

$$\begin{cases} A_{21} + FLC_1 - GC_1 - LC_1 A_{11} = 0 \\ A_{22} - LC_1 A_{12} = 0 \\ B_2 - H - LC_1 B_1 = 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi determinare:

$$\begin{cases} F = A_{22} - LC_1 A_{12} \\ G = (A_{21} - LC_1 A_{11})C_1^{-1} + FL \\ H = B_2 - LC_1 B_1 \end{cases}$$

Definiamo il sistema duale al sottosistema 2:

$$\dot{x}_{2D} = A_{22}^T x_{2D} + (C_1 A_{12})^T u$$

Si effettua la retroazione di stato su questo sistema e si ricava la matrice di retroazione K_D.

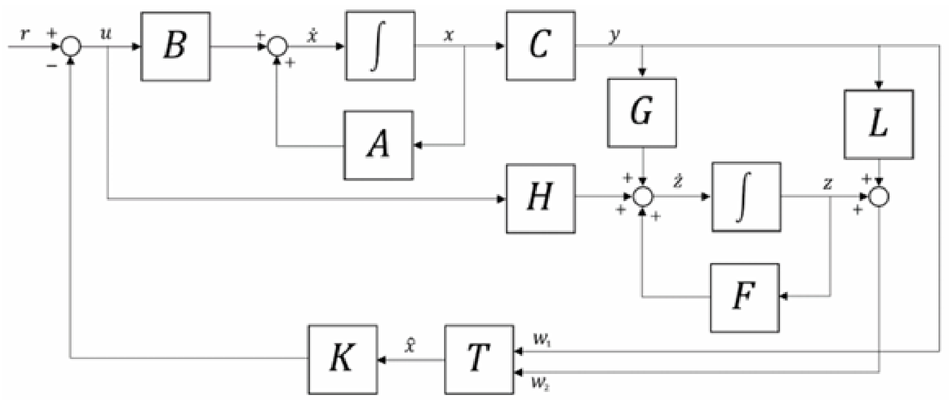
Quindi $L = K_D^T$.

Se il sistema non è nella forma descritta possiamo effettuare una trasformazione $T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$, dove R è una qualsiasi matrice tale da garantire la non singolarità di T. Effettuando la trasformazione $x = Tw$, si ottiene il sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = w_1$$

Lo schema a blocchi che rappresenta il sistema è:



8 Matlab & Simulink

Esempio 1

Considerando il seguente sistema lineare dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -6x_3(t) + 2u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

Script Matlab (.m) in cui:

- determinare il sistema in forma di stato;
- analizzare la controllabilità e l'osservabilità (dire se il sistema è completamente controllabile ed osservabile);
- determinare una matrice di retroazione di stato K che imponga gli autovalori [-2, -3, -6];
- determinare il sistema chiuso in retroazione con K in forma di stato e la sua risposta al gradino;
- verificare che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori richiesti;
- determinare un osservatore di ordine ridotto che imponga gli autovalori [-1±j];
- verificare che il sistema con l'osservatore determinato abbia gli autovalori richiesti.

Simulink:

- schema a blocchi del sistema chiuso in retroazione con K con la possibilità di visualizzare la risposta del sistema ad un gradino di ampiezza 2.

Esempio 2

Considerando il seguente sistema lineare dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + 4x_2(t) + 4x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = -6x_3(t) + u(t) \\ y(t) = 4x_1(t) \end{cases}$$

Script Matlab (.m) in cui:

- determinare il sistema in forma di stato;
- determinare la f.d.t. (funzione di trasferimento) del sistema;
- analizzare la controllabilità e l'osservabilità (dire se il sistema è completamente controllabile ed osservabile);
- determinare una matrice di retroazione di stato K che imponga gli autovalori [-1, -2, -3];
- determinare il sistema chiuso in retroazione con K in forma di stato e la sua risposta al gradino;
- verificare che il sistema chiuso in retroazione ha gli autovalori richiesti;
- determinare un osservatore di ordine ridotto che imponga gli autovalori [-5, -30];
- verificare che il sistema con l'osservatore determinato abbia gli autovalori richiesti.

Simulink:

- schema a blocchi del sistema chiuso in retroazione con K, con la possibilità di visualizzare la risposta del sistema ad un riferimento costante di ampiezza 1.

Esempio 3

Considerando il seguente sistema lineare dinamico:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 200 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Script Matlab (.m) in cui:

- determinare il sistema in forma di stato;
- verificare la stabilità del sistema;
- verificare la controllabilità e l'osservabilità;
- determinare un osservatore di ordine ridotto che abbia i seguenti autovalori [-10, -20];
- calcolare le matrici F, G, H;
- verificare che l'osservatore abbia gli autovalori richiesti.

Simulink:

- schema a blocchi del sistema con l'osservatore di ordine minimo, evidenziando le variabili in gioco.

Esempio 4

A partire dal modello lineare costituito dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{mg}{M}x_3(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{(M+m)g}{ML}x_3(t) - \frac{1}{ML}u(t) \end{cases}$$

con $M = 1.7; m = 0.7; L = 0.7; g = 9.81$.

Considerando che le uscite del sistema sono gli stati (x_1, x_3), si realizzi uno script Matlab che consenta di:

- definire i parametri caratteristici del sistema e definire il sistema in forma di stato;
- determinare gli autovalori del sistema;
- verificare controllabilità ed osservabilità;
- applicare una retroazione di stato K che minimizzi il funzionale di costo

  $$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

  con R fissato in modo da ridurre l'azione di controllo e Q scelta opportunamente;
- definire il sistema in anello chiuso in retroazione con K;
- visualizzare gli stati e le uscite del sistema in due figure diverse (inserire legenda);
- considerando lo stato iniziale $\bar{x} = [-0.5, -0.3, 0.3, 0.5]^T$ calcolare la risposta libera del sistema.

Si analizzi il modello in Simulink (creando un subsystem), verificando l'efficacia del controllore in retroazione di stato progettato $(u(t) = -Ku(t))$.

Esempio 5

Si consideri un sistema lineare tempo discreto:

$$\begin{cases} x(n+1) = Ax(n) + B(u(n) + w(n)) \\ y(n) = Cx(n) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.14 & -0.49 & 0.12 \\ 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -0.39 \\ 0.49 \\ 0.53 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

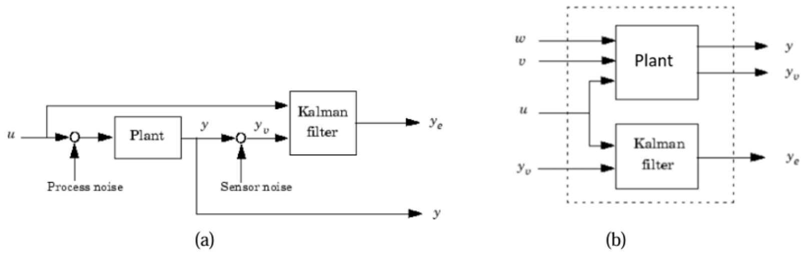
Per tale sistema e dati gli schemi (a) e (b), si realizzi uno script Matlab in grado di:

- definire il sistema, plant in (a), con le sie matrici in forma di stato;
- determinare il filtro di Kalman (a) in forma di stato sapendo che Q = R = 1;
- realizzare il modello in forma di stato rappresentato nel diagramma a blocchi (b);
- simulare il comportamento del filtro;
- visualizzare il confronto tra uscita reale ed uscita filtrata e tra l'errore di misura e l'errore di stima;
- calcolare e confrontare la covarianza dell'errore di misura e stima.

Considerando il sistema lineare tempo continuo descritto dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0.04 \\ 0 & -6334 & -50 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1667 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ripetano le operazioni per applicare il filtro di Kalman anche a tale sistema.



Commentare i risultati in entrambi i casi, evidenziando l'eventuale azione positiva del filtro di Kalman.

> N.B.: impostare un tempo di campionamento pari a 100s, con passo 1; imporre come ingresso una sinusoide di frequenza pari a 0.5 e fase nulla; determinare il ruore di processo e di misura con la funzione `randn()` moltiplicata per la radice quadrata di Q ed R rispettivamente.

Esempio 6

Considerando il modello SISO LTI di un motore in c.c. pilotato in armatura, che muove un carico calettato sull'albero motore. Le equazioni che descrivono il sistema con l'ipotesi che la coppia di carico sia trascurabile sono le seguenti:

$$v_a = R_a(t)i_a(t) + L_a\frac{di_a(t)}{dt} + e(t), \qquad e(t) = k_v\frac{d\theta(t)}{dt}, \qquad c_m(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt} + f\frac{d\theta}{dt},$$

$$c_m(t) = k_m i_a(t), \qquad \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \qquad v_a(t) = G_a v(t)$$

Tale sistema è descritto in forma di stato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f/J & k_m/J \\ 0 & -k_v/L_a & -R_a/L_a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_a/L_a \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

con $R_a = 0.06\Omega, L_a = 0.0006H, f = 1Nms, J = 100Nms^2, k_m = 3.5, k_v = 3.5$; parametri noti del sistema. Si sceglie il vettore di stato $x(t) = [\theta(t), \omega(t), i_a(t)]^T$, costituito nell'ordine della posizione del carico, dalla velocità angolare del carico e dalla corrente di armatura. Inoltre si sceglie l'ingresso del sistema uguale alla tensione di alimentazione, $u(t) = v(t)$, e l'uscita pari alla posizione angolare, $y(t) = \theta(t)$. Si suppone infine che il parametro G_a abbia un valore iniziale pari ad 1.

Realizzare lo script Matlab in grado di:

- definire il sistema con i suoi parametri caratteristici e le matrici della forma di stato;
- determinare il polinomio caratteristico in anello aperto;
- determinare guadagno, zeri e poli del sistema;
- visualizzare la risposta all'impulso e al gradino unitario;
- verificare la completa controllabilità del sistema.

Determinare inoltre la matrice di retroazione di stato in due differenti casi (K_1, K_2):

1. il controllore deve imporre che il sistema in anello chiuso abbia i seguenti poli $S_1 = -10, S_{2,3} = \sqrt{3}(-1 \pm j)$;

2. i poli devono essere $S_1 = -20, S_2 = -8, S_3 = -1$.

Bisogna:

- fissare il polinomio caratteristico desiderato in anello chiuso;
- scegliere il guadagno di amplificazione G_a, in modo da imporre a zero l'errore di posizione in anello chiuso;
- definire il sistema in anello chiuso;
- determinare la funzione di trasferimento in anello chiuso, guadagno, zeri e poli.

Visualizzare e commentare la risposta al gradino unitario in anello chiuso confrontando i due casi.

Realizzare il modello del motore cc in Simulink, chiuso in retroazione prima con K_1 e poi con K_2 confrontando e commentando i risultati rispetto a quanto ottenuto in Matlab.

Esempio 7

A partire dal sistema MISO non lineare TI, che modella un sistema idraulico con tre serbatoi comunicanti, se ne consideri la linearizzazione nell'intorno di una soluzione di equilibrio (h_0, q_0, y_0) con $q_0 = [q_{10}, q_{30}]^T$ ingresso di equilibrio (con valori costanti delle portate in ingresso), $h_0 = [h_{10}, h_{20}, h_{30}]^T$ unico stato di equilibrio ottenuto risolvendo l'equazione vettoriale:

$\dot{h} = f(h_1, h_2, h_3, q_{10}, q_{30}) = 0$

$$\begin{cases} h_{10} = h_{20} + \frac{1}{2g}(\frac{q_{10}}{c})^2 \\ h_{20} = h_{30} + \frac{1}{2g}(\frac{q_{10}}{c})^2 \\ h_{30} = H + \frac{1}{2g}(\frac{q_{10}+q_{30}}{c})^2 \\ y_0 = h_{30} \end{cases}$$

Considerando che il sistema linearizzato risulta descritto dalle seguenti matrici di stato:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ a & -2a & a \\ 0 & a & -(a+b) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con

$$a = \frac{c^2 g}{s g_{10}} \qquad b = \frac{c^2 g}{s(q_{10} + q_{30})}$$

Si realizzi uno script Matlab che:

- definisca il sistema in forma di stato;
- determini gli autovalori n anello aperto;
- verifichi la completa controllabilità ed osservabilità del sistema;
- realizzi una retroazione costante sullo stato K1 che imponga i seguenti autovalori [-0.03, -0.001+0.001j, -0.001-0.001j];
- determini l'osservatore dello stato con gli autovalori [-0.02, -0.2, -0.4];
- determini la risposta libera del sistema con condizione iniziale non nulla, quando il sistema è chiuso in retroazione con K1 e l'osservatore di stato;
- visualizzi gli stati e gli errori di stima sugli stati.

Si realizzi il modello del sistema linearizzato con la retroazione K1 e l'osservatore in Simulink tale che:

- siano impostate le condizioni iniziali opportune su stati e osservatore degli stati;
- i parametri di simulazione siano configurati opportunamente;
- il sistema idraulico e l'osservatore siano contenuti in due diversi subsystem;

- le variabili d'interesse (uscita, stati, stati stimati, errore di stima) siano memorizzate nel workspace.

Si visualizziono l'uscita, stati ed errori di stima confrontando i risultati con quanto ottenuto in Matlab, commentandoli.

N.B.: per le costanti del sistema si assumono i seguenti valori:
$r = 0.4m, R = 6m, c = \pi r^2, S = \pi R^2, g = 9.81ms^{-2}, H = 4m, q_{10} = 1.2s^{-1},$
$q_{30} = 0.5m^3s^{-1};$
$[h_1, h_2, h_3] = [4, 5, 6]; [e_{11}, e_{21}, e_{31}] = [6.2, 9]$; i segnali di riferimento sono nulli.

Esempio 8

A partire dal modello non lineare del pendolo inverso costituito dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{mLsinx_3(t)x_4^2(t) - mgsinx_3(t)cosx_3(t) + u(t)}{M + msin^2x_3(t)} \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{-mLsinx_3(t)cosx_3(t)x_4^2(t) + (M+m)gsinx_3(t) - u(t)cosx_3(t)}{(M + msin^2x_3(t))L} \end{cases}$$

dove $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)]^T = [x(t), \dot{x}(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)]^T$ è il vettore di stato e $y(t) = [x(t), \theta(t)] = [x_1(t), x_3(t)]^T$ è il vettore delle uscite. La posizione lineare dell'asta del pendolo è $x(t)$, quella angolare è $\theta(t)$; considerandone la linearizzazione intorno allo stato di equilibrio $\bar{x} = [0, 0, 0, 0]^T$ in corrispondenza dell'ingresso di equilibrio $\bar{u} = 0$ descritta dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{mg}{M}x_3(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{(M+m)g}{ML}x_3(t) - \frac{1}{ML}u(t) \end{cases}$$

con $M = 0.0; m = 0.3; L = 1; g = 9.81$.

Realizzare uno script Matlab che consenta di:

- definire i parametri caratteristici del sistema e definire il sistema in forma di stato;
- determinare gli autovalori del sistema;
- verificare controllabilità ed osservabilità;
- applicare una retroazione di stato K che minimizzi il funzionale di costo

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

  con R = 1/50 e Q scelta opportunamente;
- definire il sistema in anello chiuso in retroazione con K;
- visualizzare gli stati e le uscite del sistema in due figure diverse (inserire legenda);

Si analizzi il modello in Simulink (creando un subsystem), verificando l'efficacia del controllore in retroazione di stato progettato ($u(t) = -Ku(t)$), a partire dallo stato iniziale del pendolo pari a $\bar{x} = [0.4, 0, 0.4, 0]$.

- cosa succede con le condizioni iniziali $\bar{x} = [0.4, 0, 0.8, 0]$?