Pianificazione della produzione (1):

obiettivo: massimizzare il profitto dalla vendita di biocarburante 1 e 2.

vincoli: 3 stabilimenti, con capacità giornaliera lavorativa: preparazione, purificazione, estrazione. (I prodotti devono essere lavorati in ciascuno dei 3 stabilimenti).

leve decisionali: produrre biocarburante 1 e 2. (NUMERO FRAZIONARIO)

dati tecnologici:

	Ore (h) di lavorazione a tonnellata		
Stabilimento	Biocarburante 1 540 €/ton	Biocarburante 2 590 €/ton	Capacità giornaliera (h)
Preparazione	0.72	0.85	18
Purificazione	1.68	1.42	18
Estrazione	1.92	2.12	16

Formulazione:

variabili: $x_1, x_2 \in R$ (VARIABILI CONTINUE)

Quantità di biocarburante 1 e biocarburante 2

funzione obiettivo: $z(x) = 540\,x_1 + 590\,x_2$

Il profitto della produzione (MAX)

vincoli:

$$0{,}72\,x_1 + 0{,}85\,x_2 \leq 18$$

$$1{,}68\,x_1 + 1{,}42\,x_2 \leq 18$$

$$1{,}92\,x_1 + 2{,}12\,x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Pianificazione della produzione (2):

obiettivo: massimizzare il profitto settimanale (vendite - costi) delle argille di tipo A, B, C.

vincoli: 3 stabilimenti con capacità lavorativa settimanale. La produzione dell'argilla A deve essere [50% - 70%] della produzione totale.

leve decisionali: produrre argilla A, B, C

dati tecnologici:

	Hours (h) of processing in quintal				
Stabilimento	Argilla A 18€/quintale	Argilla B 21€/quintal	Argilla C 24€/quintal	Capacità settimanale (h)	Costo [€/h]
1	0.18	0.21	0.24	90	3.52
2	0.20	0.18	0.21	85	4.18
3	0.12	0.22	0.23	80	3.98

Formulazione:

Variabili: $x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B}, x_{1C}, x_{2C}, x_{3C} \in R$

Quantità di argille di tipo A, B, C prodotte negli stabilimenti 1, 2, 3.

funzione obiettivo:

$$z(x) = 18(x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}) + 21(x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}) + 24(x_{1C}+x_{2C}+x_{3C}) - [3{,}52(0{,}18\,x_{1A} + 0{,}21\,x_{1B} + 0{,}24\,x_{1C}) + 4{,}18(0{,}20\,x_{2A} + 0{,}18\,x_{2B} + 0{,}21\,x_{2C}) + 3{,}98(0{,}12\,x_{3A} + 0{,}22\,x_{3B} + 0{,}23\,x_{3C})]$$

- vendite
- costi

Vincoli:

$$0{,}18\,x_{1A} + 0{,}21\,x_{1B} + 0{,}24\,x_{1C} \leq 90$$

$$0{,}20\,x_{2A} + 0{,}18\,x_{2B} + 0{,}21\,x_{2C} \leq 85$$

$$0{,}12\,x_{3A} + 0{,}22\,x_{3B} + 0{,}23\,x_{3C} \leq 80$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 0{,}5(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$$

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 0{,}7(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$$

$$x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, x_{1B}, x_{2B}, x_{3B}, x_{1C}, x_{2C}, x_{3C} \geq 0$$

Mix di Produzione :

Prodotto	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Profitto/unità	30	45	24	26	24	33

Matrice tecnologica								Disponibilità
Acciaio	1	4	0	4	2	0	<=	1200
Legno	4	5	3	0	1	0	<=	1160
Plastica	0	3	8	0	1	0	<=	1780
Gomma	2	0	1	2	1	5	<=	1050
Vetro	2	4	2	2	2	4	<=	1360

obiettivo: massimizzare il profitto

vincoli: non consumare più materie prime di quelle disponibili

leve: quantità prodotte di beni

Formulazione

variabili: $x_i \in R$, per $i = 1, \dots, 6$

funzione obiettivo: $\sum_{i=1}^{6} c_i x_i$: $30x_1 + 45x_2 + 24x_3 + 26x_4 + 24x_5 + 33x_6$

vincoli: $x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 2x_5 \leq 1200$

$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_5 \leq 1160$

$3x_2 + 8x_3 + x_5 \leq 1780$

$2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 5x_6 \leq 1050$

$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 \leq 1360$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Problema della Dieta (1):

Alimento	G1	G2	G3	G4
Costo/peso	35	50	80	95

Elemento nutrizionale per unità di peso						Fabbisogno
Elemento nutrizionale A	2,2	3,4	7,2	1,5	>=	2,4
Elemento nutrizionale B	1,4	1,1	0	0,8	>=	0,7
Elemento nutrizionale C	2,3	5,6	11,1	1,3	>=	5

obiettivo: minimizzare i costi

vincoli: soddisfare i requisiti alimentari minimi

leve decisionali: quantità di alimenti acquistate

Formulazione

variabili: $x_i \in R$, per $i = 1, \dots, 4$

funzione obiettivo: $\sum_{i=1}^{6} c_i x_i = 35x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 95x_4$

vincoli: $2{,}2x_1 + 3{,}4x_2 + 7{,}2x_3 + 1{,}5x_4 \geq 2{,}4$ (nutriente A)

$1{,}4x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}8x_4 \geq 0{,}7$ (" B)

$2{,}3x_1 + 5{,}6x_2 + 11{,}1x_3 + 1{,}3x_4 \geq 5{,}0$ (" C)

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Problema della Dieta (2):

L'obiettivo é produrre 100q di acciaio a minimo costo, usando 6 tipi di rottame con disponibilitá limitata.

Le proprietá dell'acciaio devono essere queste:

1) almeno 65% ferro

2) esattamente 18% nichel

c) esattamente 10% cromo

d) al massimo 1% impuritá

	Ingredienti					
Component	Rott. 1 [%]	Rott. 2 [%]	Rott. 3 [%]	Rott. 4 [%]	Rott. 5 [%]	Rott. 6 [%]
Ferro	93	76	74	65	72	68
Nichel	5	13	11	16	6	23
Cromo	0	11	12	14	20	8
Impurità	2	0	3	5	2	1
Peso [q]	30	90	50	70	60	50
Costo [€]	50	100	80	85	92	115

Formulazione

variabili: $x_i \in \mathbb{R}$; per $i = 1, \dots, 6$ (tipi di rottame)

funzione obiettivo: $50x_1 + 100x_2 + 80x_3 + 85x_4 + 92x_5 + 115x_6$

vincoli: $0{,}93x_1 + 0{,}76x_2 + 0{,}74x_3 + 0{,}65x_4 + 0{,}72x_5 + 0{,}68x_6 \geq 0{,}65$ (ferro)

$0{,}05x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}11x_3 + 0{,}16x_4 + 0{,}06x_5 + 0{,}23x_6 = 0{,}18$ (nichel)

$0{,}11x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 + 0{,}20x_5 + 0{,}08x_6 = 0{,}1$ (cromo)

$0{,}02x_1 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}02x_5 + 0{,}01x_6 \leq 0{,}01$ (impuritá)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$ (peso max)

$x_1 \leq 30$; $x_2 \leq 90$; $x_3 \leq 50$; $x_4 \leq 70$; $x_5 \leq 60$; $x_6 \leq 50$ (disponibilitá limitate)

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Problema della Dieta (3):

Un'azienda chimica produce due tipi di fertilizzante: A e B (almeno 40'000 A e 50'000 B)

Il fertilizzante A deve contenere 25% di azoto almeno e 10% ferro almeno.

" " B deve contenere esattamente 20% azoto e almeno 16% ferro

L'azienda ha 30'000 Kg di composto 1 (acquistato a 3 €/Kg) e 25'000 Kg di composto 2 (4 €/Kg)

Il composto 1 contiene il 40% di ferro e 50% di azoto, il composto 2 contiene 6% ferro e 70% azoto

La produzione deve avvenire a costi minimi.

Formulazione

variabili: $x_{1A}, x_{2A}, x_{1B}, x_{2B} \in \mathbb{R}$

funzione obiettivo: $3x_{1A} + 4x_{2A} + 3x_{1B} + 4x_{2B}$

vincoli: $0{,}5\,x_{1A} + 0{,}7\,x_{2A} \geq 10\,000 \rightarrow 0{,}25 * 40'000$

$0{,}4\,x_{1A} + 0{,}06\,x_{2A} \geq 4000 \rightarrow 0{,}1 * 40'000$

$0{,}5\,x_{1B} + 0{,}7\,x_{2B} = 10000 \rightarrow 0{,}2 * 50'000$

$0{,}4\,x_{1B} + 0{,}06\,x_{2B} \geq 8'000 \rightarrow 0{,}16 * 50'000$

$x_{1A} + x_{1B} \leq 30'000$

$x_{2A} + x_{2B} \leq 25'000$

$x_{1A}, x_{2A}, x_{1B}, x_{2B} \geq 0$

Multiperiodo:

Un'azienda di produzione riceve una commessa per produrre lamierati di zinco di specifiche dimensioni. Le quantitá richieste devono essere consegnate periodicamente, improrogabilmente alla fine di ogni mese. Inizialmente le quantitá di lamierati di dimensione idonea stoccata in magazzino sono 100. Solamente uno stabilimento si dedica alla produzione dei lamierati richiesti.

	Periodi temporali		
	1	**2**	**3**
Richiesta [unit]	270	290	250
Capacità [unit]	250	220	280
Costo unitario di produzione [€]	12	14	16
Costo unitario di stoccaggio [€]	1.2	1.1	0.9

Formulazione

obiettivo: $\min z(x, I_t) = 12x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 1{,}2I_1 + 1{,}1I_2 + 0{,}9I_3$

vincoli: $x_1 - I_1 = 170 \rightarrow d_1 - I_0 = 270 - 100$

$x_2 + I_1 - I_2 = 290$

$x_3 + I_2 - I_3 = 250$

$x_1 \leq 250$

$x_2 \leq 220$

$x_3 \leq 280$

$x_1, x_2, x_3, I_1, I_2, I_3 \geq 0$

Taglio Ottimo :

Un'azienda produce fogli di lamiera di zinco di dimensione pari a $10 \times 1 \ m^2$, che vengono tagliati per realizzare fogli della larghezza di un metro, ma di lunghezza variabile, in modo da poter soddisfare le richieste medie mensili.

		Modalità del taglio				
Lunghezza [m]	Domanda mensile	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
3	23	2	0	0	1	1
2.5	34	1	2	0	1	0
2	28	0	1	0	2	0
4	20	0	0	2	0	1
1.5	35	1	2	1	0	2

Formulazione

Variabili : $x_i \in \mathbb{N}$, per $i = 1, \dots, 5$ (modalità di taglio)

obiettivo : $\min z(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

Vincoli : $2x_1 + x_4 + x_5 \geq 23$

$x_1 + 2x_2 + x_4 \geq 34$

$x_2 + 2x_4 \geq 28$

$2x_3 + x_5 \geq 20$

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 \geq 35$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Zaino (1):

Un'azienda si occupa del trasporto di merci su tutto il territorio nazionale. Un trasporto via terra da effettuare nei prossimi giorni richiede il caricamento su un furgone, di capacità pari a 10 quintali di 12 scatole isotermiche, utilizzate per il trasporto di prodotti a temperatura controllata, ognuna con un peso ed un valore. Quali scatole inserire nel furgone per il trasporto.

Tipologia	Peso [kg]	Valore [€]
1	114	50
2	90	50
3	75	80
4	80	10
5	55	10
6	140	30

Tipologia	Peso [kg]	Valore [€]
7	120	50
8	105	80
9	66	100
10	98	20
11	165	60
12	100	50

Formulazione

Variabili: binarie: x_j per $j = 1, 12$

Obiettivo: $\max z(x) = 50x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 30x_6 + 50x_7 + 80x_8 + 100x_9 + 20x_{10} + 60x_{11} + 50x_{12}$

Vincoli: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} \in \{0, 1\}$

$$114x_1 + 90x_2 + 75x_3 + 80x_4 + 55x_5 + 140x_6 + 120x_7 + 105x_8 + 66x_9 + 98x_{10} + 165x_{11} + 100x_{12} \leq 1000$$

10 q in kg

Zaino (2):

Una società dispone di un capitale di 200.000 € da investire in progetti di sviluppo. In particolare, sono al vaglio 3 progetti promettenti A, B, C. Determinare l'insieme di progetti che massimizzano il rendimento.

Progetto	Costo [k€]	Ritorno atteso [k€]
A	90	100
B	80	80
C	70	75

Formulazione

obiettivo: $\max z(x) = 100\, x_A + 80 x_B + 75\, x_C$

Vincoli: $90\, x_A + 80\, x_B + 70\, x_C \leq 200$

$x_A, x_B, x_C \in \{0, 1\}$

Zaino (3):

Un'azienda produttrice di biscotti deve decidere come riempire ogni scatola considerando 8 tipi di biscotti differenti (ciascuno caratterizzato da un peso ed un valore). Capacità di ogni scatola 120g

Tipo di biscotto	Peso [g]	% cioccolato pregiato
1	20	32
2	25	58
3	26	65
4	21	18
5	36	28
6	28	55
7	28	40
8	27	40

Formulazione

obiettivo: $\max z(x) = 32x_1 + 58x_2 + 65x_3 + 18x_4 + 28x_5 + 55x_6 + 40x_7 + 40x_8$

vincoli: $20x_1 + 25x_2 + 26x_3 + 21x_4 + 36x_5 + 28x_6 + 28x_7 + 27x_8 \leq 120$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$ (intere)

Caso (4) [multidimensionale]:

Una compagnia aerea vuole pianificare la realizzazione di tre progetti relativi all'acquisto di nuovi aerei nei prossimi 4 mesi. Per la realizzazione dei progetti viene stimata una disponibilità di budget (in €) pari a 1'000'000, 750'000, 950'000, 1'400'000; per il 1°, 2°, 3° e 4° mese rispettivamente. Il finanziamento riservato alla realizzazione dei progetti per ciascun mese è indicato in tabella. È stato valutato un profitto annuo (in €) per ogni progetto realizzato pari a 480'000, 300'000, 250'000.

	Mese			
Progetto	1	2	3	4
1	750.000	550.000	820.000	500.000
2	200.000	150.000	80.000	105.000
3	980.000	70.000	600.000	203.000

Formulazione

obiettivo: $\max z(x) = 480x_1 + 300x_2 + 250x_3$

vincoli: $750x_1 + 200x_2 + 980x_3 \leq 1000$

$550x_1 + 150x_2 + 70x_3 \leq 750$

$820x_1 + 80x_2 + 600x_3 \leq 950$

$500x_1 + 105x_2 + 203x_3 \leq 1400$

$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$

Costi fissi di avviamento:

Un'azienda produttrice e installatrice di impianti di condizionamento d'aria deve decidere quali tra quattro climatizzatori, precedentemente installati in uno stabilimento, deve attivare per poter garantire l'erogazione di aria, a copertura di un volume di 3600 m^3, per 15 ricambi d'aria da effettuare in 1h.

Condizionatore	Portata (m^3/h)	Costo di attivazione (€/h)	Costo di erogazione (€/(m^3/h))
1	44.000	500	2.42
2	48.000	450	2.64
3	36.000	600	1.98
4	51.000	580	2.80

Formulazione

obiettivo: $\min z(x) = 2{,}42\,x_1 + 2{,}64\,x_2 + 1{,}98\,x_3 + 2{,}80\,x_4 + 500\,y_1 + 450\,y_2 + 600\,y_3 + 580\,y_4$

vincoli:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 54000 \rightarrow 3600 * 15 \\ x_1 - 44000\,y_1 \leq 0 \\ x_2 - 48000\,y_2 \leq 0 \\ x_3 - 36000\,y_3 \leq 0 \\ x_4 - 51000\,y_4 \leq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Capacited Plant Location (1) :

Un'azienda agricola deve rifornire quotidianamente sette fattorie che hanno una richiesta media quotidiana di foraggio (in quintali) pari rispettivamente a 36, 42, 34, 50, 27, 30, 43.
L'azienda é intenzionata ad acquistare alcuni sili destinati per la fornitura delle suddette fattorie. Sono stati individuati nel territorio 6 diversi siti potenziali dove sono ubicati altrettanti sili aventi una massima quantitá giornaliera di foraggio (espressa in q) disponibile pari rispettivamente a 80, 90, 110, 120, 100, 120. Per i successivi 4 anni, l'azienda ha stimato i seguenti costi fissi (in €) per ciascun sito potenziale: 321'420, 350'640, 379'860, 401'775, 350'640, 336'030.
Il costo giornaliero medio di stoccaggio per ogni quintale di prodotto (in €) é pari, per ciascun sito potenziale a: 0.15, 0.18, 0.20, 0.18, 0.15, 0.17.
Il costo di trasporto per ogni quintale di prodotto per ogni Km percorso é 0.06 €. Le distanze chilometriche per ogni coppia origine-destinazione sono in Tabella. Per i costi di trasporto occorre considerare che ogni viaggio é composto da tratte andata e ritorno.

	Fattorie						
Silos potenziali	1	2	3	4	5	6	7
1	18	23	19	21	24	17	9
2	21	18	17	23	11	18	20
3	27	18	17	20	23	9	18
4	16	23	9	31	21	23	10
5	31	20	18	19	10	17	18
6	18	17	29	21	22	18	8

Formulazione

obiettivo : $\min z(x,y) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} k_{ij} d_j x_{ij} + \sum_{i \in N_1} f_i y_i$ $\quad N_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$; $N_2 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

k_{ij} considera le distanze in tabella (da moltiplicare *2 per considerare ANDATA-RITORNO *0.06 costo)

f_i = 321'420/(1'461), 350'640/1'461, 379'860/1'461, 401'775/1'461, 350'640/1'461, 336'030/1'461 =

NUMERO di gg in 4 anni: 365 * 4

= 220, 240, 260, 275, 240, 230

d_j = 36, 42, 34, 50, 27, 30, 43 $\quad q_i$ = 80, 90, 110, 120, 100, 120

vincoli :

$$\begin{cases} \sum_{i \in N_1} x_{ij} = 1 & j \in N_2 \\ \sum_{j \in N_2} d_j x_{ij} \le q_i y_i & i \in N_1 \quad * \\ x_{ij} \ge 0 \quad \wedge \quad y_i \in \{0,1\} \end{cases}$$

$$z(x,y) = 2{,}16\,x_{11} + 2{,}76\,x_{12} + 2{,}28\,x_{13} + 2{,}52\,x_{14} + 2{,}88\,x_{15} +$$

$$+ 2{,}04\,x_{16} + 1{,}08\,x_{17} + 2{,}52\,x_{21} + 2{,}16\,x_{22} + 2{,}04\,x_{23} +$$

$$+ 2{,}76\,x_{24} + 1{,}32\,x_{25} + 2{,}16\,x_{26} + 2{,}4\,x_{27} + 3{,}24\,x_{31} +$$

$$+ 2{,}16\,x_{32} + 2{,}04\,x_{33} + 2{,}4\,x_{34} + 2{,}76\,x_{35} + 1{,}08\,x_{36} +$$

$$+ 2{,}16\,x_{37} + 1{,}92\,x_{41} + 2{,}76\,x_{42} + 1{,}08\,x_{43} + 3{,}72\,x_{44} +$$

$$+ 2{,}52\,x_{45} + 2{,}76\,x_{46} + 1{,}2\,x_{47} + 3{,}72\,x_{51} + 2{,}4\,x_{52} +$$

$$+ 2{,}16\,x_{53} + 2{,}28\,x_{54} + 1{,}2\,x_{55} + 2{,}04\,x_{56} + 2{,}16\,x_{57} +$$

$$+ 2{,}16\,x_{61} + 2{,}04\,x_{62} + 3{,}48\,x_{63} + 2{,}52\,x_{64} + 2{,}64\,x_{65} + 2{,}16\,x_{66} +$$

$$+ 0{,}96\,x_{67} + 220\,y_1 + 240\,y_2 + 260\,y_3 + 275\,y_4 + 240\,y_5 +$$

$$+ 230\,y_6$$

CPL (2):

Con riferimento al problema precedente: si assuma che il sesto silo, se acquisito deve avere un minimo livello di attività pari a 90q, mentre il massimo livello di attività resta invariato (120).

Aggiungiamo

Vincolo: $36x_{61} + 42x_{62} + 34x_{63} + 50x_{64} + 27x_{65} + 30x_{66} + 43x_{67} \geq 90\,y_6$

Simple Plant Location (SPL):

Con riferimento al problema di localizzazione dell'azienda, ipotizzando che i sili non abbiano vincoli sul livello di attività giornaliera (cioè ogni silo in grado di soddisfare l'intera domanda media giornaliera di foraggio per tutte le fattorie)

Sostituiamo il vincolo * con:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \leq 7 y_1$ → cardinalità di N_2 → $|N_2|$ → in questo caso pari al NUMERO di fattorie → 7.

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} \leq 7 y_2$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} \leq 7 y_3$

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 7 y_4$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} \leq 7 y_5$

$x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} + x_{67} \leq y_6$

CPL (3):

Un istituto di credito ha utilizzato il modello di p-mediana per determinare la posizione ottimale di due sportelli bancari nella cittá di Bari. Il territorio cittadino é stato suddiviso in 8 diversi quartieri, mentre sono stati individuati 6 diversi siti potenziali dove ubicare i due sportelli. I 6 siti sono caratterizzati da costi di attivazione assunti identici per ogni sito. I costi di collegamento tra i siti potenziali e i centroidi degli 8 quartieri sono proporzionali alle relative distanze chilometriche riportate in tabella.

	Quartiere							
Sito	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.1	1.7	2.8	0.3	0.8	2.2	1.8	0.7
2	1.5	2.2	3.1	2.2	0.2	1.9	2.3	1.3
3	0.9	1.6	2.3	0.3	1.7	1.6	0.9	2.7
4	1.8	3.1	2.7	2.6	3.1	0.6	0.2	0.7
5	0.1	2.5	1.8	3.1	0.4	1.2	0.7	1.1
6	0.5	1.4	3.1	0.5	0.2	1.5	2.2	0.8

Formulazione:

distanze chilometriche in tabella

$$\min z(x) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{8} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i \in N_1} x_{ij} = 1 & j \in N_2 \\ \sum_{j \in N_2} x_{ij} \le |N_2| y_i & i \in N_1 \\ \sum_{i \in N_2} y_i = 2 \\ x_{ij} \ge 0 \wedge y_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

X DA FARE
EXCEL e MATLAB

Caricamento contenitori (1):

Un'azienda produce aspirapolveri: il prodotto finale é composto da 6 componenti principali che possono essere realizzati su 4 linee identiche di produzione. Ogni linea é caratterizzata da una capacitá di produzione giornaliera pari a 580 minuti.

I tempi di lavorazione (in min) necessari per produrre ciascun componente su una qualsiasi delle 4 linee di produzione sono rispettivamente: 150, 300, 250, 300, 220, 190.

L'obiettivo é assegnare alle linee i singoli componenti in modo tale che ogni componente venga prodotto esattamente da una linea.

Il numero complessivo di minuti di lavorazione su ogni linea non superi la capacitá produttiva della linea stessa ed il numero di linee sia minimizzato.

Formulazione 1-BP

$$\min z(x,y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} = 1 \\ 150x_{11} + 300x_{21} + 250x_{31} + 300x_{41} + 220x_{51} + 190x_{61} \leq 580y_1 \\ 150x_{12} + 300x_{22} + 250x_{32} + 300x_{42} + 220x_{52} + 190x_{62} \leq 580y_2 \\ 150x_{13} + 300x_{23} + 250x_{33} + 300x_{43} + 220x_{53} + 190x_{63} \leq 580y_3 \\ 150x_{14} + 300x_{24} + 250x_{34} + 300x_{44} + 220x_{54} + 190x_{64} \leq 580y_4 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,\dots,6 \ \land \ j = 1,\dots,4 \\ y_i \in \{0,1\} \quad j = 1,\dots,4 \end{cases}$$

Caricamento contenitori (2):

Un corriere su gomma operante principalmente in Francia e Belgio deve consegnare 16 colli di differenti dimensioni da Parigi a Francoforte (distanza tra queste città 592 Km). Le dimensioni dei colli sono riportate in tabella.

Poiché soltanto 3 furgoni di proprietà della compagnia (tutti di capacità 800kg) saranno disponibili al momento della consegna (costo 100 euro complessivi per la missione), l'azienda ha deciso di noleggiare veicoli aggiuntivi da terzi:

- 2 camion di capacità 3 tonnellate ciascuno, il cui costo complessivo di noleggio (comprendente anche gli autisti) é di 1,4€/Km.
- 1 camion con rimorchio di capacità 3,5 Tonnellate, con costo complessivo 1,6 €/Km.

Collo	Peso (kg)	Collo	Peso (kg)
1	370	9	190
2	320	10	160
3	300	11	160
4	265	12	140
5	265	13	130
6	240	14	130
7	230	15	100
8	210	16	95

Formulazione

ANDATA - RITORNO

COSTO NOLEGGIO

$1,4 * 592 * 2$ DISTANZA $1,6 * 592 * 2$

$$\min z(x,y) = 100\,y_1 + 100\,y_2 + 100\,y_3 + 1657,6\,y_4 + 1657,6\,y_5 + 1894,4\,y_6$$

$$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} + x_{1,6} = 1$$

$$\vdots$$

$$x_{16,1} + x_{16,2} + x_{16,3} + x_{16,4} + x_{16,5} + x_{16,6} = 1$$

$$370\,x_{1,1} + 320\,x_{2,1} + 330\,x_{3,1} + \dots + 95\,x_{16,1} \leq 800\,y_1$$

$$\vdots$$

$$370\,x_{16,6} + 320\,x_{16,6} + \dots + 95\,x_{16,6} \leq 3500\,y_6$$

CAPACITÀ TRASFORMATE DA TONNELLATE A Kg

$$x_{ij} \in \{1,0\} \wedge y_j \in \{1,0\} \qquad i = 1,\dots,16 \wedge j = 1,\dots,6$$

Condizioni Logiche:

Un' associazione desidera organizzare un'esposizione di macchine d'epoca presso la propria sede. Le auto disponibili sono: una Fiat 500, Alfa romeo GTA, Bianchina Autobianchi, Fiat Simca, Lancia Flavia, Innocenti Austin A40. Il valore di ogni auto é stato calcolato tramite il numero medio giornaliero di persone potenzialmente interessate a partecipare alla mostra per quell'auto. Tale numero é pari rispettivamente a: 58, 37, 42, 40, 55, 33. Per organizzare l'evento si ha un budget di 15'000 €. Il costo da sostenere per spostare ogni auto é: 6000, 4000, 3800, 4200, 5500, 3200. Si vogliono selezionare le auto da presentare rispettando i vincoli di budget e massimizzando il numero di visitatori. Inoltre é necessario che siano scelte almeno 3 auto e se é scelta la Bianchina, allora dovrá essere inclusa anche la Lancia. Se la 500 non é inclusa allora deve essere scelta l'Alfa.

Formulazione

variabili decisionali:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'auto 'i' é solo per la mostra} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$s = [58;\ 37;\ 42;\ 40;\ 55;\ 30]$$

$$c = [6000;\ 4000;\ 3800;\ 4200;\ 5500;\ 3200]$$

obiettivo: $\max\ z(x) = \sum_{i=1}^{6} s_i x_i$

vincoli:

$$\sum_{i=1}^{6} c_i x_i \leq 15'000$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \geq 3$$

$$x_3 \leq x_5 \quad \rightarrow \quad x_3 - x_5 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$\boxed{x_i \in \{0, 1\} \text{ per } i = 1, \dots, 6}$$

Vincoli Alternativi

Un'azienda alimentare specializzata nel settore dolciario sta valutando la possibilità di avviare la produzione di 3 nuovi prodotti. L'azienda dispone di due stabilimenti che possono essere utilizzati entrambi per realizzare tutti i prodotti. I tempi necessari per produrre una confezione di ciascun prodotto sono evidenziati in tabella. Per ogni stabilimento è stata individuata la capacità giornaliera. Il primo stabilimento può essere usato massimo 10 h/gg il secondo 18 h/gg. Al fine di limitare i costi logistici, l'azienda ha deciso che solo uno dei due stabilimenti dovrà essere utilizzato e al massimo 2 prodotti dovranno essere messi in produzione. Massimizzare il profitto giornaliero.

	Tempi di lavorazione		
Prodotto	Stabilimento 1	Stabilimento 2	Profitto unitaro (€)
1	2	2	500
2	3	1	400
3	1	4	600

Formulazione: (MILP)

Variabili decisionali: x_{ij} (continue): rappresentano la quantità di prodotto j prodotta nello stabilimento i

$x_{ij} \geq 0$

$y_i \in \{0, 1\}$ — 1: STABILIMENTO 'i' USATO; 0: STABILIMENTO NON USATO

$z_j \in \{0, 1\}$ — 1: MESSO IN PRODUZIONE (IL PRODOTTO 'j'); 0: ALTRIMENTI

funzione obiettivo: $\max z(x) = 500(x_{11} + x_{21}) + 400(x_{12} + x_{22}) + 600(x_{13} + x_{23})$

vincoli:

$2x_{11} + 3x_{12} + 1x_{13} \leq 10$

$2x_{21} + 1x_{22} + 4x_{23} \leq 18$

$y_1 + y_2 = 1$

(6 vincoli in tot) $x_{ij} \leq M y_i \quad \forall i, j$ con M grande ad es. 1000

$z_1 + z_2 + z_3 \leq 2$

$x_{11} + x_{21} \leq M z_1$

$x_{12} + x_{22} \leq M z_2$

$x_{13} + x_{23} \leq M z_3$

Valore Assoluto

Un'azienda produce 3 diversi tipi di profumo particolarmente adatti per il periodo estivo. Per la produzione di tali profumi vengono utilizzati (oltre ad alcol ed acqua) tre diversi tipi di essenze indicati come F_1, F_2, F_3; disponibili in quantitá limitata: 25'000 ml, 20'000 ml, 22'000 ml. Ad ogni essenza é associato un valore che ne rappresenta la qualitá: 20, 25, 20. I tre tipi di profumo da realizzare devono rispettare i requisiti in tabella. L'obiettivo che si vuole raggiungere riguarda la determinazione della quantitá mensile dei 3 profumi da realizzare rispettando i vincoli di qualitá e massimizzando una funzione obiettivo definita come $|Q_2 - p|$, con Q_2: qualitá del secondo tipo di profumo; e p un parametro che per la sperimentazione per il mese successivo é 15. Si suppone che la qualitá di un profumo sia una funzione lineare delle % dei componenti e che il grado di qualitá dell'acqua e alcol sia uguale a zero. Quantitá di essenza presente in ogni profumo deve essere compresa tra il 20% e 50%. La quantitá di acqua deve essere almeno il 50% della quantitá di alcol. Infine si vuole realizzare un ricavo complessivo che nel mese seguente sia pari ad almeno 95'000€

Profumo	Domanda[ml]	Qualità	Prezzo[€\ml]
1	25.000	>=7	1.5
2	30.000	<=13	1.2
3	42.000	>=9	1.0

Formulazione

variabili

x_{ij}: quantitá di essenza 'i' nel profumo j.

$i = F_1, F_2, F_3, H_2O, A$

$j = 1, 2, 3$

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3} p_i x_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{5} x_{ij} \qquad \forall j = 1, \dots, 3.$$

$$p = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix}$$

obiettivo

$$\max |Q_2 - 15| \rightarrow \max \left| \sum_{i=1}^{3} p_i x_{i2} - 15 \sum_{i=1}^{5} x_{i2} \right|$$

valore assoluto da scomporre in ulteriori vincoli

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1,2 \\ 1,0 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} 25'000 \\ 30'000 \\ 42'000 \end{bmatrix}$$

percentuale di essenza i

$$\left[\begin{aligned} &\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{5} x_{ij}} \geq 0.2 \\ &\frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^{5} x_{ij}} \leq 0,5 \end{aligned} \right\} \quad \forall i,j = 1, \dots, 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 25'000 \\ 20'000 \\ 22'000 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 \geq 7 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} p_i x_{i1} \geq 7 \sum_{i=1}^{5} x_{ij}$$

$$Q_2 \leq 13 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} p_i x_{i2} \leq 13 \sum_{i=1}^{5} x_{ij}$$

$$Q_3 \geq 9 \rightarrow \sum_{i=1}^{3} p_i x_{i3} \geq 9 \sum_{i=1}^{5} x_{ij}$$

$$x_{ij} \geq 0{,}5 \; X_{5j} \qquad \forall j = 1, \dots, 3$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} \geq d_j \qquad \forall_j = 1, \dots, 3.$$

$$\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} p_{ij} \geq 95000$$

$$\sum_{j=1}^{9} x_{ij} \leq c_i \qquad \forall i = 1, \dots, 3$$

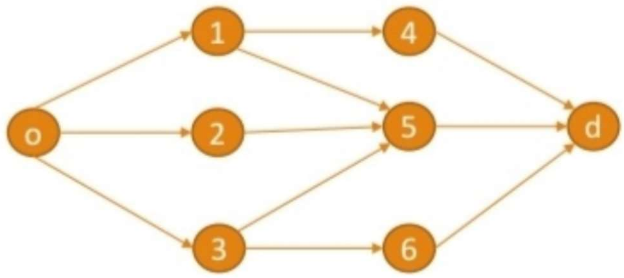
PL : programmazione Lineare

PLI : // // Intera

M : mixed

Ottimizzazione Robusta Assoluta

• Un'azienda deve stabilire come instradare dei pacchetti da un nodo origine «o» a un nodo destinazione «d» nella rete di telecomunicazione rappresentata dal digrafo $D=(N, A)$ rappresentato in figura. Il tempo di instradamento c_{ij} lungo l'arco (i,j), con $(i,j) \in A$, dipende dalle condizioni del traffico sulla rete che variano in funzione del periodo di tempo considerato. In particolare sono state individuate quattro fasce orarie (mattina, pomeriggio, sera, notte) da cui dipende il tempo di instradamento. Per rappresentare l'incertezza si considerano pertanto quattro scenari che descrivono il tempo di trasmissione su ogni collegamento della rete, la mattina (scenario 1), il pomeriggio (scenario 2), la sera (scenario 3) e la notte (scenario 4) come evidenziato nella tabella successiva.



	Arco										
Scenario	(o,1)	(o,2)	(o,3)	(1,4)	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(3,6)	(4,d)	(5,d)	(6,d)
Mattina	5	10	7	4	10	4	7	5	1	10	6
Pomeriggio	8	5	9	7	8	3	10	6	10	8	5
Sera	6	8	4	5	6	9	1	10	7	4	8
Notte	10	5	5	2	1	10	5	1	5	7	4

$$\min \left(MAX \quad c(w) \right)$$

Caso 1 (MATTINA):

- 0,1,4,d → $z = 5 + 4 + 1 = 10$
- 0,1,5,d → $z = 5 + 10 + 10 = 25$
- 0,2,5,d → $z = 10 + 4 + 10 = 24$
- 0,3,5,d → $z = 7 + 7 + 10 = 24$
- 0,3,6,d → $z = 7 + 5 + 6 = 18$

CASO 2 (POMERIGGIO):

- 0,1,4,d → $z = 8 + 7 + 10 = 25$

- $0, 1, 5, d \rightarrow z = 8 + 8 + 8 = 24$
- $0, 2, 5, d \rightarrow z = 5 + 3 + 8 = 16$
- $0, 3, 5, d \rightarrow z = 9 + 10 + 8 = 27$
- $0, 3, 6, d \rightarrow z = 9 + 6 + 5 = 20$

MAX

CASO 3 (SERA):

- $0, 1, 4, d \rightarrow z = 6 + 5 + 7 = 18$
- $0, 1, 5, d \rightarrow z = 6 + 6 + 4 = 16$
- $0, 2, 5, d \rightarrow z = 8 + 9 + 4 = 21$
- $0, 3, 5, d \rightarrow z = 4 + 1 + 4 = 9$
- $0, 3, 6, d \rightarrow z = 4 + 10 + 8 = 22$

CASO 4 (NOTTE):

- $0, 1, 4, d \rightarrow z = 10 + 2 + 5 = 17$
- $0, 1, 5, d \rightarrow z = 10 + 1 + 7 = 18$
- $0, 2, 5, d \rightarrow z = 5 + 10 + 7 = 22$
- $0, 3, 5, d \rightarrow z = 5 + 5 + 7 = 17$
- $0, 3, 6, d \rightarrow z = 5 + 1 + 4 = 10$

MIN del MAX

Ottimizzazione Robusta Relativa

• L'azienda ritiene che il cammino minimo robusto in senso assoluto rappresenti una scelta estremamente conservativa e, di conseguenza, vuole individuare anche il cammino minimo robusto in senso relativo. Per calcolare tale soluzione è necessario determinare per ogni realizzazione del tempo di instradamento in un dato scenario, il cammino un minimo dal nodo «o» al nodo «d». I corrispondenti valori sono evidenziati nella successiva tabella nella quale per ogni scenario viene riportata la sequenza di nodi corrispondente al cammino ottimo il tempo di instradamento ottimale.

Scenario (s)	Cammino ottimo	$z^{(s)*}$
Mattina	o,1,4,d	10
Pomeriggio	o,2,5,d	16
Sera	o,3,5,d	9
Notte	o,3,6,d	10

??

Condizioni Logiche:

AND:

$$x_\alpha \geq x_\gamma$$
$$x_\beta \geq x_\gamma$$
$$x_\gamma \geq x_\alpha + x_\beta - 1$$

→ γ é vera se entrambe le condizioni α e β sono vere

OR:

$$\boxed{x_\alpha \leq x_\gamma}$$

→ se α é vero, anche γ deve essere vera

$$x_\beta \leq x_\gamma$$
$$x_\gamma \leq x_\alpha + x_\beta$$

→ γ é vera se almeno una delle due é vera

al massimo una tra le condizioni α, β, γ sia vera: $x_\alpha + x_\beta + x_\gamma \leq 1$

Esattamente " " " " " " " : $x_\alpha + x_\beta + x_\gamma = 1$

Valore Assoluto:

$$z(x) = |f(x)| = \begin{cases} f & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

$\min \; z(x) = K$

s.t.

$K \geq f(x)$

$K \geq -f(x)$

$x \in X$

$\max \; z(x) = K$

s.t.

$K \leq f(x)$ (se $f(x) \geq 0$)

$K \leq -f(x)$ (se $f(x) \leq 0$)

$x \in X$

$|g(x)| \leq b \rightarrow g(x) \leq b \ \wedge \ -g(x) \leq b$

Vincoli alternativi

My 1
$M(1-y)$ 2

$y \in \{0, 1\}$ o capita il caso 1 o 2

Se abbiamo più vincoli:

My_1 1
My_2 2
My_3 3
My_n n

$y_i \in \{0, 1\}$
$i = 1, \dots, n$

$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ può capitare solo 1 tra i casi!

SBA (Soluzione di Base Ammissibile)

A :
A_B :
A_N :
b :
c^T :

$A_B^{-1} b \geq 0 \rightarrow$ la soluzione é ammissibile (se il problema è in forma standard).

$\bar{C}^T = C^T - C_B^T A_B^{-1} A \rightarrow \begin{cases} \overset{\text{min}}{\geq 0} \text{ per tutti i termini NON in base} \\ \overset{\text{max}}{\leq 0} \text{ '' '' '' '' '' '' ''} \end{cases} \rightarrow$ la soluzione é OTTIMA.

Duale:

$\min z(x) = c^T x \longleftrightarrow \max w(y) = b^T y$

$a_i^T x \geq b_i$	$y_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$y_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	y_i libera
$x_i \geq 0$	$y^T A_j \leq c_j$
$x_i \leq 0$	$y^T A_j \geq c_j$
x_i libera	$y^T A_j = c_j$

VINCOLI $\xleftrightarrow{\text{(NON CAMBIANO)}}$ VARIABILI

VARIABILI $\xleftrightarrow{\text{(CAMBIANO)}}$ VINCOLI

$$z^* = w^*$$

$w \leq z \rightarrow$ se z é $-\infty \rightarrow w$ non ha soluzione

teorema degli scarti complementari: (condizioni di ortogonalità)

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = 0 \qquad \text{per } j = 1, \dots, n$$

Forma Canonica:

$\min \bar{z} + \bar{c}_N^T x_N$

s.t.

$x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_N$

$x_B, x_N \geq 0$

$\bar{b} = A_B^{-1} b$

$\bar{z} = c_B^T \bar{b}$

$\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$

$\bar{c}_N^T \rightarrow$ VARIABILI NON IN BASE PRESE DA $\bar{c}^T$

Sensitività:

$b \to b + \Delta b$:

OTTIMALITÁ INVARIATA.

$A_B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0 \to$ DA VERIFICARE $\to$ $A_B^{-1} \Delta b \geq -A_B^{-1} b$

Shadow Prices: $\Delta z = y^T \Delta b$ con $y^T = C_B^T A_B^{-1}$

INTERVALLO $\to$ $[b_i + \Delta^{MIN} ; b_i + \Delta^{MAX}]$ $\to$ DA FARE 1 ALLA VOLTA CON PSE

$C \to C + \Delta c$:

AMMISSIBILITÁ INVARIATA.

$\bar{c}^T = \underline{(c^T + \Delta_c^T)} - \underline{(c_B^T + \Delta_{c_B}^T)} A_B^{-1} A \geq 0^T \to$ VERIFICARE

Fuori base: $\Delta c_N \geq -\bar{c}_j \to \bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$

In base: $\Delta_{c_B}^T A_B^{-1} A_N \leq \bar{c}_N^T$

INTERVALLO $\to$ $[c_j + \Delta^{MIN} ; c_j + \Delta^{MAX}]$ $\to$ CON SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

Forma standard:

$\min \; z(x)$

$a_i x_i = b_i$

$x_i \geq 0$

Per portare il problema (P) in questa forma:

- Se (P) é di MAX considero $-z(x)$
- Se qualche $x_i \leq 0$ considero $x_i' = -x_i$; $x_i' \geq 0$
- Se qualche vincolo non é attivo aggiungo variabili slack o di surplus:

$$x_1 + x_2 \leq 0 \rightarrow x_1 + x_2 + s_1 = 0$$
$$x_1 + x_2 \geq 0 \rightarrow x_1 + x_2 - s_2 = 0$$

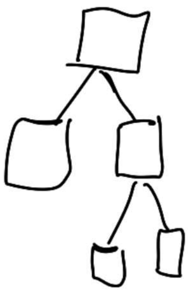
Rilassamento Lineare (RL):

Problema ottenuto eliminando i vincoli di interezza da un PLI

Euristica (h):
dalle variabili rilassate linearmente fai un arrotondamento per difetto o eccesso [per NON USCIRE DALL'AMMISSIBILITÁ] ed avere valori interi.

$$z_{RL} \geq z \geq z_h$$

Branch and Bound:



etc... trovo soluzione INTERA

TUM (Matrice Totalmente Unimodulare):

Se una matrice é TUM la soluzione intera é uguale a quella del RL.

Per essere TUM tutte le sottomatrici quadrate NON singolari hanno determinante uguale a ± 1.

Problemi di Costo minimo: (Cammino minimo)

$$\min z(x) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(i,v) \in A} x_{iv} - \sum_{(v,j) \in A} x_{vj} = b_v \qquad \forall v \in N \qquad \begin{cases} b_v > 0 \rightarrow \text{NODI DOMANDA} & \text{SORGENTE} = 1 \\ b_v < 0 \rightarrow \text{OFFERTA} & \text{DESTINAZIONE} = -1 \\ b_v = 0 \rightarrow \text{TRANSITO} \end{cases}$$

$x_{ij} \in R^+ \qquad x_{ij} \in \{0, 1\}$

duale:

$$\max w(y) = y_d - y_s$$

s.t.

$$y_j - y_i \leq c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$$

$$y_v \in R \qquad \forall v \in N$$

TSP :

Variabili decisionali:
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se e solo se la città "i" è visitata prima di quella "j"} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

COSTO ARCHI

obiettivo: $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

VINCOLI: $\sum_j x_{ij} = \sum_i x_{ij} = 1$

MODI equivalenti PER ALTRI VINCOLI

(1) $\sum_{i \in S,\, j \in T} x_{ij} \geq 1 \quad \forall \{S,T : S \cup T = V,\ S \cap T = \emptyset\}$

(2) $\sum_{i,j \in Q} x_{ij} \leq |Q| - 1 \quad \forall Q : V \supset Q$

(3) $y_i - y_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad \forall i,j \in V$

Problema di Ottimizzazione NON lineare:

min $z(x)$

s.t.

$g_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, k$

$h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, h$

$x \in \mathbb{R}^n$

fmincon

ga

PSO: $\min\ z(x) + B \sum_j \left[\max(g_j, 0) + \max(|h_j|, 0)\right]$